p-valently α - convex functions of order β について(Convolution の新しい展開)

福井, 誠一

数理解析研究所講究録
1012 巻 1997 年 14-19

p-valently α - convex functions of order β について

和歌山大学・教育　福井　誠一　(Seiichi FUKUI)

この報告は J.Dziok と J.Stankiewicz の論文 [1] を本にして考察, 研究したものである。[1] には若干のミスプリントがあり, 修正をしさらに α について拡張した結果を得た。

1 準備

A$(p), P\in$ N を単位円板 $\mathrm{U}=\{z;|z|<1\}$ 内で正則な関数 $f(z)$

$$f(z)=z^{p}+a_{p+1}z^{p+1}+\cdots\cdots$$

の集合とする。

$f(z)\in \mathrm{A}(p)$ に対して, p-valently starlike of order α な関数を次のように定義する。

$$(1.1)\qquad f(z)\in \mathrm{S}_{p}^{*}(\alpha)\Longleftrightarrow \mathrm{Re}\frac{zf(z)}{f(z)}>\alpha,\quad z\in \mathrm{U}.$$

ここに, α は $p>\alpha\geq 0$ を満たす定数である。また, 同じ条件を満たす α と $f(z)\in \mathrm{A}(p)$ に対して, p-valently convex of order α な関数を次のように定義する。

$$(1.2)\qquad f(z)\in \mathrm{K}_{p}(\alpha)\Longleftrightarrow \mathrm{Re}\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}>\alpha,\quad z\in \mathrm{U}.$$

さらに, p-valently α - convex of order β な関数を次のように定義する。$f(z)\in \mathrm{A}(p)$ に対して,

$$(1.3)\qquad f(z)\in \mathrm{M}_{p}(\alpha,\beta)\Longleftrightarrow \mathrm{Re}\left\{\alpha\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)+(1-\alpha)\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\}>\beta,\quad z\in \mathrm{U}.$$

ここに, α , β は実数で β は $p>\beta$ を満たす。

[1] では, $\frac{f(z)f'(z)}{z^{2p-1}} \neq 0$ という条件を付けているが, これは (1.3) の条件があれば必然的に示される。

2　主定理

定義から直ちに, 次の結果が得られる。

定理 1.　任意の実数 α に対して, $\mathrm{M}_p(\alpha, 0) \subset \mathrm{S}_p^*(0)$ が成立する。

証明.

$$\mathrm{Re}\left\{\alpha\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)+(1-\alpha)\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\}>0, \quad z\in\mathrm{U}$$

のとき,

$$\mathrm{Re}\ \frac{zf'(z)}{f(z)}>0, \quad z\in\mathrm{U}$$

を示せばよい。$q(z)=\frac{zf'(z)}{f(z)}$ とおくと,

$$\alpha\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)+(1-\alpha)\frac{zf'(z)}{f(z)}=q(z)+\alpha\frac{zq'(z)}{q(z)} \tag{2.1}$$

となり, $q(z)$ は U で正則かつ, $q(0)=p$ である。$z=0$ の近傍では $\mathrm{Re}\ q(z)>0$ が成立している。今, ある $z_0\in\mathrm{U}$ が存在して, $\mathrm{Re}\ q(z)>0, |z|<|z_0|$ かつ $\mathrm{Re}\ q(z_0)=0$ になったとすると $\frac{z_0q'(z_0)}{q(z_0)}$ は純虚数になる。Fukui [2] 参照。これより,

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}&\left\{\alpha\left(1+\frac{z_0f''(z_0)}{f'(z_0)}\right)+(1-\alpha)\frac{zf'(z_0)}{f(z_0)}\right\}\\ &= \mathrm{Re}\left\{q(z_0)+\alpha\frac{z_0q'(z_0)}{q(z_0)}\right\}=0\end{aligned} \tag{2.2}$$

となり, 仮定に反する。よって, $\mathrm{Re}\ q(z_0)=0$ となる $z_0\in\mathrm{U}$ は存在しない。即ち, 任意の実数 α に対して $f(z)\in\mathrm{S}_p^*(0)$ を示している。□

注意 1.　$q(z_0)\neq 0$ は仮定から示すことができる。

注意 2. [1](Theorem 1) では, $M_p(\alpha) \subset M_p(0) \equiv S_p^*(0), 0 \leq \alpha < p$, すなわち $M_p(\alpha, 0) \subset M_p(0,0) \equiv S_p^*(0), 0 \leq \alpha < p$, としているが, この定理 1 ではすべての実数 α について成立することを示している。

定理 1 から直ちに次の結果が得られる。

系 1. $q(z) = a + p_1 z + \cdots$ が U で $a > 0$ ならば, 任意の実数 α について

$$\text{(2.3)} \qquad \mathrm{Re}\left\{ q(z) + \alpha \frac{zq'(z)}{q(z)} \right\} > 0, \quad z \in \mathrm{U} \implies \mathrm{Re}\ q(z) > 0, \quad z \in \mathrm{U}$$

が成立する。

系 2. 任意の実数 α について, $M_p(\alpha, 0) \subset S_p^*(0)$ が成立し, とくに,

$$\text{(2.4)} \qquad M_p(\alpha, 0) \subset K_p(0) \subset S_p^*(0), \quad \alpha \geq 1$$

となる。

証明. $M_p(\alpha, 0) \subset K_p(0)$ のみを示せばよい。任意の $f(z) \in M_p(\alpha, 0)$ に対して

$$\mathrm{Re}\left\{ \alpha \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) + (1-\alpha) \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > 0, \quad z \in \mathrm{U}$$

が成立しているから, $\alpha \geq 1$ と定理 1 の結果から

$$\text{(2.5)} \qquad \mathrm{Re}\left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} > \frac{\alpha - 1}{\alpha} \left\{ \mathrm{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > 0, \quad z \in \mathrm{U}$$

を得, $f(z) \in K_p(0)$ が示される。

系 3. 系 2 で, $p = 1$ とすると Miller-Mocanu-Reade [3] となる。

次の定理A, 定理B, 定理C, はそれぞれ[1]のTheorem 2, Theorem 4, Theorem 3である。これより定理2が得られるのである。

定理A.

$p > \beta \geq 0$ に対して, $f(z) \in \mathrm{M}_p(\alpha, \beta) \Leftrightarrow$ 関数 $g(z) \in \mathrm{S}_p^*(\beta)$ が存在して,

(2.6)
$$f(z) = \left\{ \frac{p}{\alpha} \int_0^z \left(\frac{g(w)}{w^p} \right)^{\frac{1}{\alpha}} w^{\frac{p}{\alpha}-1} dw \right\}^{\alpha}.$$

これは,

(2.7)
$$\alpha \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) + (1-\alpha) \frac{zf'(z)}{f(z)} = \frac{zg'(z)}{g(z)}$$

より明らかである。

定理 B.　$\alpha > 0, f(z) \in \mathrm{M}_p(\alpha, 0)$ のとき, $\frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \frac{zk'_{p,\alpha}(z)}{k_{p,\alpha}(z)}$ が成立する。ここに, $\prec$ は subordination を示し, $k_{p,\alpha}(z)$ は

(2.8)
$$k_{p,\alpha}(z) = \left\{ \frac{p}{\alpha} \int_0^z \left(\frac{k(w)}{w^p} \right)^{\frac{1}{\alpha}} w^{\frac{p}{\alpha}-1} dw \right\}^{\alpha}$$

で定義され, $k(z) = \frac{z^p}{(1+z)^{2p}} \in \mathrm{S}_p^*(0)$ は極値関数である。

定理 C.　$\alpha > 0$ のとき, $\varphi(z) = \frac{zk'_{p,\alpha}(z)}{k_{p,\alpha}(z)}$ は $\mathrm{U} - \{-1\}$ で正則で, U で単葉である。

定理 2.　$\mathrm{M}_p(\alpha, 0) \subset \mathrm{S}_p^*(\gamma)$ が成立する。ここに,

(2.9)
$$\gamma = p \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{p}{\alpha})}{\sqrt{\pi}\Gamma(1 + \frac{p}{\alpha})}, \quad \alpha \geq p$$

で, $\Gamma(x)$ はガンマ関数を表し, この結果は sharp である。

証明は [1] と本質的に変わる所はない。証明の概要と要点だけ述べておく。(特に、ミスプリントが多い所) 定理Bと定理Cにより $\varphi(z) = \frac{zk'_{p,\alpha}(z)}{k_{p,\alpha}(z)}$ の $z = e^{i\theta}$ $(|\theta| < \pi)$ における最小値が上記の γ であることを示せばよい。

$k_{p,\alpha}(z)=f(z)$ とおくと, $\varphi(e^{i\theta})=\frac{e^{i\theta}f'(e^{i\theta})}{f(e^{i\theta})}$ となり,

(2.10) $$f(z)=\left\{\frac{p}{\alpha}\int_0^z(1+w)^{-\frac{2p}{\alpha}}w^{\frac{p}{\alpha}-1}dw\right\}^{\alpha}$$

から計算していく。

$$\int_0^z=\int_0^1+\int_1^{e^{i\theta}}\qquad(z=e^{i\theta})$$

と積分を分割し,

$$\int_0^1(1+w)^{-\frac{2p}{\alpha}}w^{\frac{p}{\alpha}-1}dw=A$$

とおく。このとき;

(2.11) $$A=\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{p}{\alpha})}{2^{\frac{2p}{\alpha}}\Gamma(\frac{p}{\alpha}+\frac{1}{2})},\qquad \alpha>0$$

を得る。ここに, $\Gamma(x)$ はガンマ関数を示す。また,

$$\int_0^{e^{i\theta}}(1+w)^{-\frac{2p}{\alpha}}w^{\frac{p}{\alpha}-1}dw=iB(\theta)$$

とおくことができて,

(2.12) $$B(\theta)=2^{-\frac{p}{\alpha}}\int_0^{\theta}(1+\cos u)^{-\frac{p}{\alpha}}du>0$$

となる。これより

$$\varphi(e^{i\theta})=\frac{\alpha B'(\theta)(A-iB(\theta))}{A^2+B^2(\theta)}$$

ゆえに,

(2.13) $$\mathrm{Re}\ \varphi(e^{i\theta})=\frac{\alpha AB'(\theta)}{A^2+B^2(\theta)}=\frac{2^{-\frac{p}{\alpha}}\alpha A}{(1+\cos\theta)^{\frac{p}{\alpha}}(A^2+B^2(\theta))}$$

の最小値が $\theta=0$ でとることを示すのである。

定理 2 について次の 2 つのことを注意したい。

注意 3. $\alpha\geq p$ でなければ成立しない。特に, $\alpha=p=1$ のときは Marx-Strohhächer の結果,

$$f(z)=z+a_2z^2+\cdots \text{が U で正則のとき}, \mathrm{Re}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)>0, z\in \mathrm{U}$$

が成立すれば $\mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \frac{1}{2}, z \in \mathrm{U}$ となる。

が得られる。

注意 4. 定理2と同様のことが $\mathrm{M}_p(\alpha, \beta)$ についても考えられる。予想としてあげておく。

予想： $\mathrm{M}_p(\alpha, \beta) < \mathrm{S}_p^*(\gamma)$ が成立する。

ここに,

$$\gamma = \frac{2^{-\frac{2(p-\beta)}{\alpha}}\alpha}{\int_0^1 (1+t)^{-\frac{2(p-\beta)}{\alpha}} t^{\frac{p}{\alpha}-1} dt}$$

である。

参考文献

[1] J.Dziok and J.Stankiewicz, The order of starlikeness of the p-valent α -convex functions, Mathematyka z.19(1996),5-12.

[2] S.Fukui, On Jack's lemma and Miller-Mocanu's lemma, Bull.Fac.Edu.Wakayama Univ.Nat.Sci.,45(1995),1-7.

[3] S.Fukui, P-valently starlike functions and convex functions について, 京都大学数理解析研究所講究録 963(1996),23-28.

[4] S.S.Miller, P.T.Mocanu and M.O.Reade, All alpha-convex functions are univalent and starlike functions, Proc. A.M.S. 37(1973),553-554.

[5] S.S.Miller, P.T.Mocanu and M.O.Reade, On the order of starlikeness of alpha convex functions, Mathematica Cluj 20(1978),25-30.